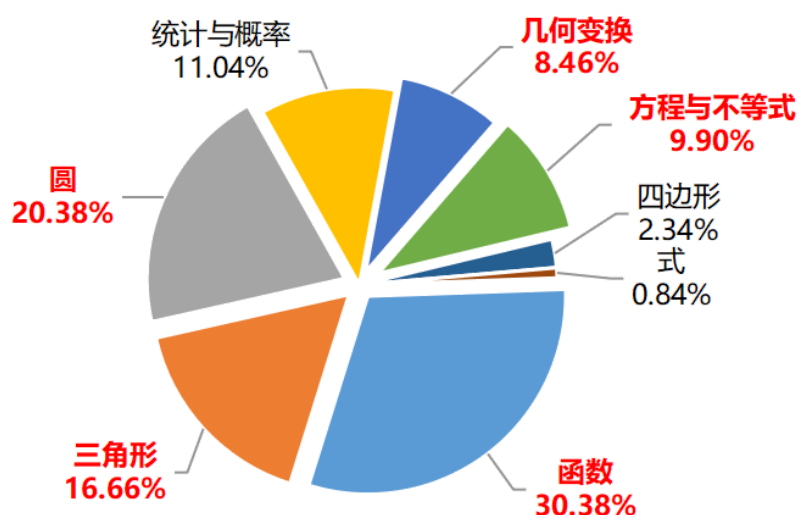


综合复习（一）

本模块《综合复习》属于人教版教材第二十一、二十二、二十三、二十四、二十七章的内容，是期末考试的重要考察点，重点包括一元二次方程、二次函数、旋转、圆、相似三角形五部分，需要学生在理解概念、性质的基础上进行灵活的运用。

本模块难度适中，适用于基础知识的巩固，本模块为综合复习一（一元二次方程与二次函数部分）、综合复习二（旋转、圆、相似三角形部分），加油站与讲义内容完全对照，帮助学生继续巩固薄弱点和易错点。

知己知彼



知识点	难度	考频
一元二次方程	★★★	中
二次函数	★★★★	高
旋转	★★★★	高
圆	★★★★	高
相似三角形	★★★★	高

一、一元二次方程

1. 一元二次方程的定义

③令每个因式为 0 , 得到两个一元一次方程 ;

④解这两个一元一次方程得原方程的解 .

3. 根与系数的关系

当 $\Delta \geq 0$, 方程的两个根 x_1, x_2 和系数 a, b, c 有如下关系 :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a} .$$

栗子

1. 方程① $2x^2 - 9 = 0$ ② $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = 0$ ③ $xy + x^2$ ④ $7x + 6 = x^2$ ⑤ $ax^2 + bx + c = 0$ 中 , 一元二次方程的个数是 () .

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】 B

【解析】 ②为分式方程 , 一元二次方程为整式方程 , 故不符合题意 ; ③为代数式 , 不为等式 , 不符合题意 ; ⑤中 a 可能为 0 , 若 $a = 0$ 则不为一元二次方程 , 不符合题意 ; 因此一元二次方程为①④ , 有 2 个 , 故选 B .

【标注】 【思想】 方程思想

【能力】 抽象概括能力

【知识点】 一元二次方程的定义

2. 若关于 x 的一元二次方程为 $ax^2 + bx + 5 = 0 (a \neq 0)$ 的解是 $x = 1$, 则 $2013 - a - b$ 的值是 () .

A. 2018

B. 2008

C. 2014

D. 2012

【答案】 A

【解析】 $\because x = 1$ 是一元二次方程 $ax^2 + bx + 5 = 0$ 的一个根 ,

$$\therefore a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 5 = 0 ,$$

$$\therefore a + b = -5 ,$$

$$\therefore 2013 - a - b = 2013 - (a + b) = 2013 - (-5) = 2018 .$$

故选 : A .

【标注】 【知识点】 利用根求代数式的值

3. 把一元二次方程 $(1-x)(2-x) = 3 - x^2$ 化成一般形式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 其中 a 、 b 、 c 分别为 () .
- A. 2、3、-1 B. 2、-3、-1 C. 2、-3、1 D. 2、3、1

【答案】 B

【解析】 原方程可整理为： $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ，
 $\therefore a = 2, b = -3, c = -1$.
故选：B .

【标注】 【知识点】 一元二次方程的一般形式

4. 若关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2 + 5x + m^2 - 3m + 2 = 0$ 的常数项为0，则 m 的值等于 () .
- A. 1 B. 2 C. 1或2 D. 0

【答案】 B

【解析】 根据题意，知，
$$\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ m^2 - 3m + 2 = 0 \end{cases}$$

解方程得： $m = 2$.
故选：B .

【标注】 【知识点】 一元二次方程系数的判断

5. 已知 $x = -1$ 是一元二次方程 $ax^2 + bx - 10 = 0$ 的一个解，且 $a \neq -b$ ，则 $\frac{a^2 - b^2}{2a + 2b}$ 的值为 _____ .

【答案】 5

【解析】 $\because x = -1$ 是一元二次方程 $ax^2 + bx - 10 = 0$ 的一个解，
 $\therefore a - b - 10 = 0$ ，
 $\therefore a - b = 10$ ，
 $\because a \neq -b$ ，
 $\therefore a + b \neq 0$ ，
 $\therefore \frac{a^2 - b^2}{2a + 2b} = \frac{(a+b)(a-b)}{2(a+b)} = \frac{a-b}{2} = \frac{10}{2} = 5$ ，

故答案是：5 .

【标注】【知识点】利用根求代数式的值

6. 已知 a 是 $x^2 - 2009x + 1 = 0$ 的根，求 $a^2 - 2008a - \frac{a^2 + 1}{2009}$ 的值 .

【答案】 -1.

【解析】 $\because a^2 + 1 = 2009a$,
原式 $= a^2 - 2008a - a$
 $= a^2 - 2009a$
 $= -1$.

【标注】【知识点】利用根求代数式的值

栗子

7. 用公式法解方程 .

(1) $5x^2 - 7x + 2 = 0$.

(2) $2x^2 + 3x - 3 = 0$.

(3) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$.

(4) $2x^2 + 3x + 4 = 0$.

【答案】 (1) $x_1 = 1, x_2 = \frac{2}{5}$.
(2) $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{4}, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{4}$.
(3) $x_1 = \sqrt{2} + 1, x_2 = \sqrt{2} - 1$.
(4) 方程无实数根 .

【解析】 (1) $\Delta = 49 - 40 = 9$,
 $x_1 = \frac{7 + 3}{10} = 1, x_2 = \frac{7 - 3}{10} = \frac{2}{5}$.
(2) $\Delta = 9 + 24 = 33$,
 $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{4}, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{4}$.
(3) $\Delta = 8 - 4 = 4$,
 $x_1 = \frac{2\sqrt{2} + 2}{2} = \sqrt{2} + 1$,

$$x_2 = \frac{2\sqrt{2}-2}{2} = \sqrt{2}-1.$$

$$(4) \Delta = 9 - 32 < 0,$$

$\therefore$ 方程无实数根.

【标注】【知识点】公式法求一元二次方程的根

8. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (m-3)x - m = 0$,

(1) 求证: 方程有两个不相等的实数根.

(2) 如果方程的两实根为 x_1 、 x_2 , 且 $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$, 求 m 的值.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 1, 2.

【解析】(1) $\because \Delta = m^2 - 2m + 9 = (m-1)^2 + 8 > 0$,

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根.

(2) $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$ 变形可得 $(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 7$,

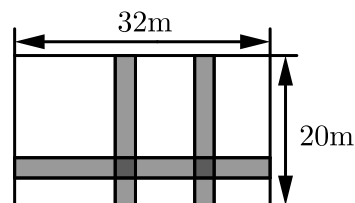
利用韦达定理代入可求得 $m_1 = 1, m_2 = 2$.

故答案为: 1, 2.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

栗子

9. 如图, 某小区计划在一块长为32m, 宽为20m的矩形空地上修建三条同样宽的道路, 剩余的空地上种植草坪, 使草坪的面积为570m². 若设道路的宽为 x m, 则下面所列方程正确的是().



A. $(32-2x)(20-x) = 570$

B. $32x + 2 \times 20x = 32 \times 20 - 570$

C. $(32-x)(20-x) = 32 \times 20 - 570$

D. $32x + 2 \times 20x - 2x^2 = 570$

【答案】A

【解析】设道路的宽为 x m, 根据题意得: $(32-2x)(20-x) = 570$.

【标注】【知识点】一元二次方程的几何问题

10. 要组织一次排球邀请赛，参赛的每两个队都要比赛一场．根据场地和时间等条件，赛程计划安排7天，每天安排4场比赛，设比赛组织者应邀请 x 个队参赛，则 x 满足的关系式为（ ）．

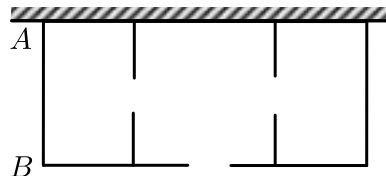
A. $\frac{1}{2}x(x+1) = 28$ B. $\frac{1}{2}x(x-1) = 28$ C. $x(x+1) = 28$ D. $x(x-1) = 28$

【答案】B

【解析】单循环的比赛，每个队都要与剩余的对打一场比赛，比赛组织者应邀请 x 个队参赛， $\frac{1}{2}x(x-1) = 28$ ．

【标注】【知识点】一元二次方程的握手、送礼物问题

11. 某建筑工程队在工地一边靠墙处，用81米长的铁栅栏围成三个相连的长方形仓库，仓库总面积为440平方米．为了方便取物，在各个仓库之间留出了1米宽的缺口作通道，在平行于墙的一边留下一个1米宽的缺口作小门，若设 $AB = x$ 米，则可列方程（ ）．



A. $x(81-4x) = 440$ B. $x(78-2x) = 440$ C. $x(84-2x) = 440$ D. $x(84-4x) = 440$

【答案】D

【解析】 $x[81-x-x-(x-1)-(x-1)+1] = 440$ ，

化简可得 $x(84-4x) = 440$ ．

故选D．

【标注】【知识点】一元二次方程的几何问题

12. 某药品原价每盒25元，为了响应国家解决老百姓看病贵的号召，经过连续两次降价，现在售价每盒16元，则该药品平均每次降价的百分率是 _____ ．

【答案】20%

【解析】解：设该药品平均每次降价的百分率为 x ，

由题意可知经过连续两次降价，现在售价每盒16元，

$$\text{故 } 25(1-x)^2 = 16,$$

解得 $x = 0.2$ 或 1.8 （不合题意，舍去），

故该药品平均每次降价的百分率为20%．

故答案为：20%．

【标注】【知识点】一元二次方程的其他实际问题

13. 利客来超市水果专柜张经理以每斤2元的价格购进富士苹果若干斤，然后以每斤4元的价格出售，每天可售出100斤，通过调查发现，这种水果每斤的售价每降低0.2元，每天可多售出40斤．为保证每天至少售出260斤，张阿姨决定降价销售．

（1）若将这种水果每斤的售价降低 x 元，则每天的销售量是 _____ 斤（用含 x 的代数式表示）．

（2）销售这种水果要想每天盈利300元，张阿姨需将每斤的售价降低多少元．

【答案】（1） $100 + 200x$ ．

（2）张阿姨需将每斤的售价降低1元．

【解析】（1）将这种水果每斤的售价降低 x 元，则每天的销售量是

$$100 + \frac{x}{0.2} \times 40 = 100 + 200x \text{（斤）；}$$

故答案为： $100 + 200x$ ．

（2）根据题意得： $(4 - 2 - x)(100 + 200x) = 300$ ，

$$\text{解得：} x = \frac{1}{2} \text{ 或 } x = 1,$$

$$\text{当 } x = \frac{1}{2} \text{ 时，销售量是 } 100 + 200 \times \frac{1}{2} = 200 < 260;$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时，销售量是 } 100 + 200 = 300 \text{（斤）．}$$

∵每天至少售出260斤，

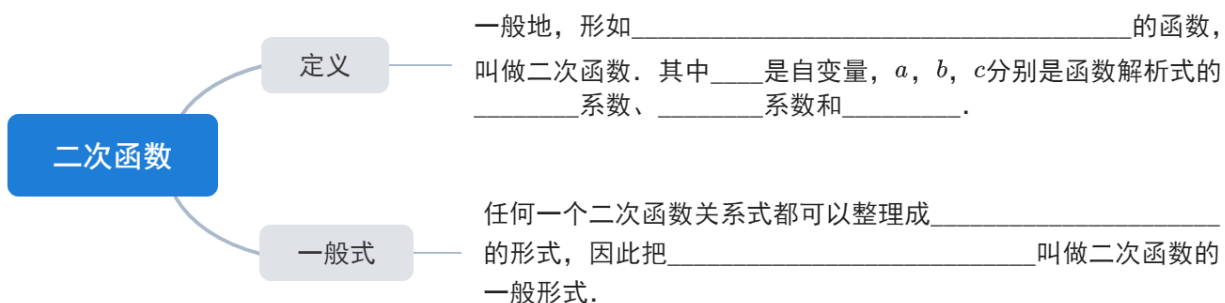
$$\therefore x = 1.$$

答：张阿姨需将每斤的售价降低1元．

【标注】【知识点】一元二次方程的利润问题

二、二次函数

1. 二次函数定义与性质



二次函数一般式：

$y = ax^2 + bx + c$		
a 的符号	$a > 0$	$a < 0$
开口方向	向 <u>上</u>	向 <u>下</u>
对称轴	$x = -\frac{b}{2a}$	
顶点坐标	$(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$	
函数最值	有最小值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$	有最大值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$
	当定义域为全体实数时，函数的最小值或最大值是顶点 <u>纵</u> 坐标的值	
增减性	当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时， y 随 x 的增大而 <u>减小</u>	当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时， y 随 x 的增大而 <u>增大</u>
	当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时， y 随 x 的增大而 <u>增大</u>	当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时， y 随 x 的增大而 <u>减小</u>
开口大小	$ a $ 越大，开口 <u>越小</u> ； $ a $ 越小，开口 <u>越大</u> ． 在对称轴右侧，沿着逆时针方向， a 的值逐渐 <u>增大</u> ．	

二次函数顶点式：

$y = a(x - h)^2 + k$		
a 的符号	$a > 0$	$a < 0$
开口方向	向上	向下
对称轴	$x = h$	
顶点坐标	(h, k)	
函数最值	有最小值 k	有最大值 k
	当定义域为全体实数时，函数的最小值或最大值是顶点纵坐标的值	
增减性	当 $x < h$ 时， y 随 x 的增大而减小	当 $x < h$ 时， y 随 x 的增大而增大
	当 $x > h$ 时， y 随 x 的增大而增大	当 $x > h$ 时， y 随 x 的增大而减小

二次函数交点式：

由此可得： $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ 也是表示二次函数的一种解析式，叫作 **交点式**，其中 x_1, x_2 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根，即二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图象与 x 轴公共点的 **横** 坐标；对称轴为 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

2. 二次函数图象变换

二次函数平移口诀： 上加下减，左加右减，上下平移在末梢，左右平移在括号

	$y = ax^2 + bx + c$	$y = a(x - h)^2 + k$
上下平移 n 的单位的解析式	$y = ax^2 + bx + c \pm n$	$y = a(x - h)^2 + k \pm n$
左右平移 m 的单位的解析式	$y = a(x \pm m)^2 + k$	$y = a(x - h \mp m)^2 + k$

二次函数关于坐标轴对称口诀： 关于谁谁不变，另一个变相反，关于原点都要变

	$y = ax^2 + bx + c$	$y = a(x - h)^2 + k$
关于 x 轴对称	$y = -ax^2 - bx - c$	$y = -a(x - h)^2 - k$
关于 y 轴对称	$y = ax^2 - bx + c$	$y = a(x + h)^2 + k$
关于原点对称	$y = -ax^2 + bx - c$	$y = -a(x + h)^2 - k$

二次函数的特殊对称：

①关于顶点对称

$y = a(x - h)^2 + k$ 关于 x 轴对称后，开口大小 不变，方向 改变， a 变成 $-a$ ，顶点 (h, k) 不变，所以新的解析式为 $y = -a(x - h)^2 + k$ 。

②关于某点 (m, n) 对称

$y = a(x - h)^2 + k$ 关于原点对称后，开口大小 不变，方向 改变， a 变成 $-a$ ，把顶点 (h, k) 先关于 (m, n) 变成 $(2m - h, 2n - k)$ ，所以新的解析式为 $y = -a(x - 2m + h)^2 + 2n - k$ 。

③关于直线 $y = m$ 对称

$y = a(x - h)^2 + k$ 关于直线 $y = m$ 对称，开口大小 不变，方向 改变， a 变成 $-a$ ，把顶点 (h, k) 关于直线 $y = m$ 对称变成 $(h, 2m - k)$ ，所以新的解析式为 $y = -a(x - h)^2 + 2m - k$ 。

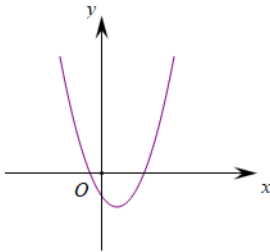
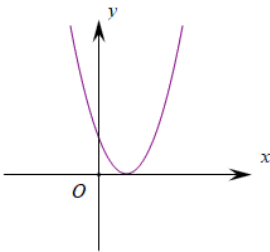
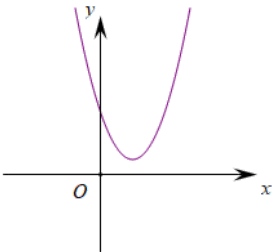
④关于直线 $x = n$ 对称

$y = a(x - h)^2 + k$ 关于直线 $x = n$ 对称，开口大小 不变，方向 不变， a 变成 $-a$ ，把顶点 (h, k) 关于直线 $x = n$ 对称变成 $(2n - h, k)$ ，所以新的解析式为 $y = a(x - 2n + h)^2 + k$ 。

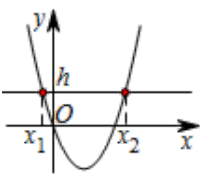
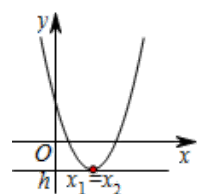
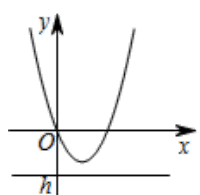
3. 二次函数与方程、不等式综合

①二次函数与 y 轴交点坐标：令 $x = 0$ ，得 $y = b$ ，因此与 y 轴交点坐标为 $(0, b)$ 。

②二次函数与 x 轴交点坐标：令 $y = 0$ ，得 $ax^2 + bx + c = 0$ ，因此方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解可以看做函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交点的 横坐标，交点的个数决定方程解的个数。

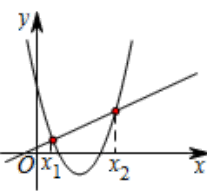
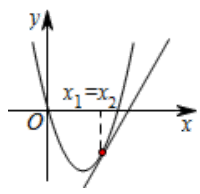
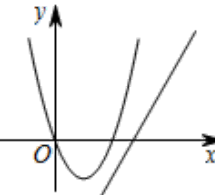
			
与 x 轴交点个数	<u>2</u>	<u>1</u>	<u>没有</u>
判别式	<u>$\Delta > 0$</u>	<u>$\Delta = 0$</u>	<u>$\Delta < 0$</u>
根的情况	<u>有两个不等实根</u>	<u>有两个相等实根</u>	<u>没有实数根</u>

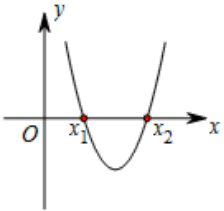
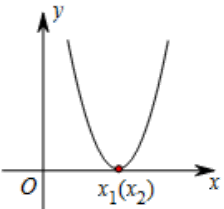
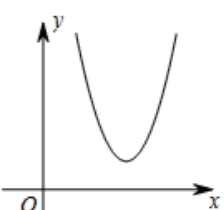
求抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y = h$ 的交点：

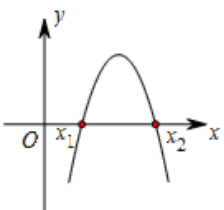
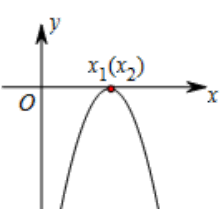
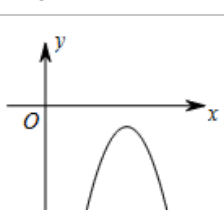
$ax^2 + bx + c - h = 0$ 的判别式 Δ	图象 (以 $a > 0$ 为例)	与直线 $y = h$ 的交点情况	一元二次方程根的情况
$\Delta > 0$		有 <u>两</u> 个交点	有 <u>两个不相等</u> 的实数根
$\Delta = 0$		有 <u>一</u> 个交点	有 <u>两个相等</u> 的实数根
$\Delta < 0$		<u>无交点</u>	<u>无</u> 实数根

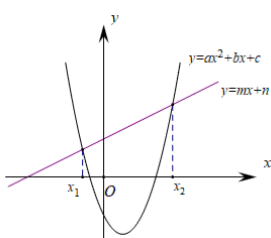
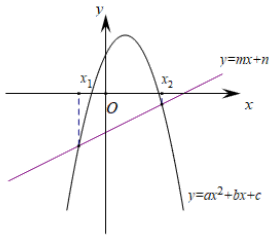
求二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与一次函数 $y = mx + n$ 的交点：

联立两个函数解析式，整理可得 $ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0$ ，方程的根即两个函数交点的横坐标；由方程根的情况，确定二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与直线 $y = mx + n$ 位置关系

$ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0$ 的判别式 Δ	图象 (以 $a > 0$ 为例)	与直线 $y = mx + n$ 的交点情况	一元二次方程根的情况
$\Delta > 0$		有 <u>两</u> 个交点	有 <u>两个不相等</u> 的实数根
$\Delta = 0$		有 <u>一</u> 个交点	有 <u>两个相等</u> 的实数根
$\Delta < 0$		<u>无交点</u>	<u>无</u> 实数根

	图象	与 x 轴的交点情况	$ax^2 + bx + c > 0$ 的解集	$ax^2 + bx + c < 0$ 的解集
$a > 0$		有 <u>两</u> 个交点	$x < x_1$ 或 $x > x_2$	$x_1 < x < x_2$
		有 <u>一</u> 个交点	$x \neq x_1$ (或 $x \neq x_2$)	无解
		<u>无</u> 交点	全体实数	无解

	图象	与 x 轴交点情况	$ax^2 + bx + c > 0$ 的解集	$ax^2 + bx + c < 0$ 的解集
$a < 0$		有 <u>两</u> 个交点	$x_1 < x < x_2$	$x < x_1$ 或 $x > x_2$
		有 <u>一</u> 个交点	无解	$x \neq x_1$ (或 $x \neq x_2$)
		<u>无</u> 交点	无解	全体实数

	图象	解集
$a > 0$		$ax^2 + bx + c > mx + n$ 的解集为 $x < x_1$ 或 $x > x_2$
		$ax^2 + bx + c = mx + n$ 的解为 $x = x_1$ 或 $x = x_2$
		$ax^2 + bx + c < mx + n$ 的解集为 $x_1 < x < x_2$
$a < 0$		$ax^2 + bx + c < mx + n$ 的解集为 $x < x_1$ 或 $x > x_2$
		$ax^2 + bx + c = mx + n$ 的解为 $x = x_1$ 或 $x = x_2$
		$ax^2 + bx + c > mx + n$ 的解集为 $x_1 < x < x_2$

栗子

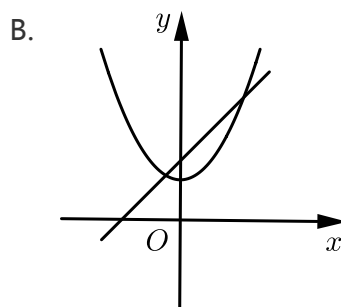
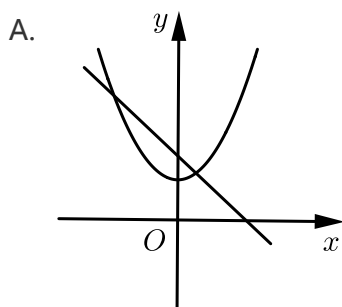
14. 如果函数 $y = (m+1)x^{m^2-m} + 2$ 是二次函数，那么 m 的值为 _____ .

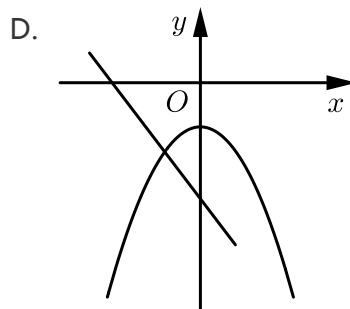
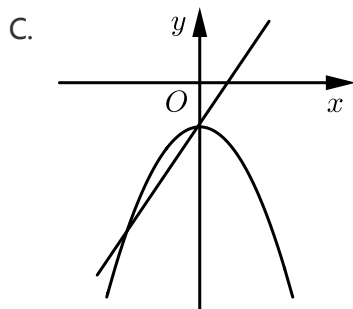
【答案】 2

【解析】 $\because$ 函数 $y = (m+1)x^{m^2-m} + 2$ 是二次函数，
 $\therefore m+1 \neq 0$ 且 $m^2 - m = 2$.
 解得 $m = 2$.

【标注】 【知识点】 利用二次函数的定义求参数的值

15. 函数 $y = ax^2 + c$ 与 $y = -ax + c (a \neq 0)$ 在同一坐标系内的图象是图中的 ().





【答案】 C

【解析】 A 选项：由二次函数 $y = ax^2 + c$ 的图象可得： $a > 0, c > 0$ ，由函数 $y = -ax + c$ 的图象可得： $a > 0, c > 0$ ，函数 $y = -ax + c$ 与 $y = ax^2 + c$ 的与坐标轴的交点不是同一点，故A错误；

B 选项：由二次函数 $y = ax^2 + c$ 的图象可得： $a > 0, c > 0$ ，由函数 $y = -ax + c$ 的图象可得： $a < 0, c > 0$ ，故B错误；

C 选项：由二次函数 $y = ax^2 + c$ 图象可得： $a < 0, c < 0$ ，由函数 $y = -ax + c$ 的图象可得： $a < 0, c < 0$ ，函数 $y = -ax + c$ 与 $y = ax^2 + c$ 的与坐标轴的交点是同一点，故C正确；

D 选项：由二次函数 $y = ax^2 + c$ 的图象可得： $a < 0, c < 0$ ，由函数 $y = -ax + c$ 的图象可得： $a > 0, c < 0$ ，故D错误。

故选 C。

【标注】【知识点】二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象和性质

16. 二次函数 $y = -2(x+1)^2 - 4$ 的顶点坐标是 ()。

- A. (1, 4) B. (-1, 4) C. (-1, -4) D. (1, -4)

【答案】 C

【解析】 二次函数 $y = -2(x+1)^2 - 4$ 的顶点坐标是 $(-1, -4)$ 。

故选C。

【标注】【知识点】二次函数顶点式

17. 已知二次函数 $y = -x^2 + 2x - 3$ ，用配方法化为 $y = a(x-h)^2 + k$ 的形式为 _____。

【答案】 $y = -(x-1)^2 - 2$

【解析】 $\because y = -x^2 + 2x - 3$

$$= -(x^2 - 2x) - 3$$

$$= -(x - 1)^2 - 2.$$

【标注】【知识点】二次函数解析式间转化

18. 若抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴只有一个交点，且过点 $A(m, n)$ ， $B(m - 4, n)$ ，则 n 的值为（ ）.

A. 0

B. 2

C. 4

D. 8

【答案】C

【解析】 $\because$ 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 过点 $A(m, n)$ ， $B(m - 4, n)$ ，

$$\therefore \text{对称轴是 } x = \frac{m + m - 4}{2} = m - 2,$$

又 $\because$ 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴只有一个交点，

$\therefore$ 顶点为 $(m - 2, 0)$ ，

$$\text{设抛物线 } y = (x - m + 2)^2,$$

把 $A(m, n)$ 代入 $y = (x - m + 2)^2$ 中得 $n = 4$.

故选C .

【标注】【知识点】二次函数 $y = a(x - h)^2$ 的图象和性质

19. 若点 $A(1, y_1)$ ， $B(2, y_2)$ 在抛物线 $y = a(x + 1)^2 + 2(a < 0)$ 上，则下列结论正确的是（ ）.

A. $2 > y_1 > y_2$

B. $2 > y_2 > y_1$

C. $y_1 > y_2 > 2$

D. $y_2 > y_1 > 2$

【答案】A

【解析】 $\because y = a(x + 1)^2 + 2(a < 0)$ ，当 $x > -1$ 时， y 值随 x 增大而减小，当 $x = -1$ 时，有最大值为2 .

又 $\because$ 点 $A(1, y_1)$ ， $B(2, y_2)$ 都在抛物线 $y = a(x + 1)^2 + 2(a < 0)$ 的图象上，

$$1 < 2,$$

$$\therefore 2 > y_1 > y_2 .$$

故选A .

【标注】【知识点】二次函数 $y = a(x - h)^2 + k$ 的图象和性质

20. 下列关于二次函数 $y = -(x - m)^2 + m^2 + 1$ (m 为常数)的结论：①该函数的图象与函数 $y = -x^2$ 的图象形状相同；②该函数的图象一定经过点 $(0, 1)$ ；③当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而减小；④该函数的图象的顶点在函数 $y = x^2 + 1$ 的图象上，其中所有正确结论的序号是 _____ .

【答案】 ①②④

【解析】 解：① $\because$ 二次函数 $y = -(x - m)^2 + m^2 + 1$ (m 为常数)与函数 $y = -x^2$ 的二次项系数相同，
 $\therefore$ 该函数的图象与函数 $y = -x^2$ 的图象形状相同，故结论①正确；
② $\because$ 在函数 $y = -(x - m)^2 + m^2 + 1$ 中，令 $x = 0$ ，则 $y = -m^2 + m^2 + 1 = 1$ ，
 $\therefore$ 该函数的图象一定经过点 $(0, 1)$ ，故结论②正确；
③ $\because y = -(x - m)^2 + m^2 + 1$ ，
 $\therefore$ 抛物线开口向下，对称轴为直线 $x = m$ ，当 $x > m$ 时， y 随 x 的增大而减小，故结论③错误；
④ $\because$ 抛物线开口向下，当 $x = m$ 时，函数 y 有最大值 $m^2 + 1$ ，
 $\therefore$ 该函数的图象的顶点在函数 $y = x^2 + 1$ 的图象上，故结论④正确。
故答案为①②④.

【标注】【知识点】二次函数的定义；二次函数顶点式

21. 求经过 $A(4, 0)$ ， $B(-2, 0)$ ， $C(0, 3)$ 三点的抛物线解析式.

【答案】 $y = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 3$.

【解析】 根据题意设抛物线解析式为 $y = a(x + 2)(x - 4)$ ，
把 $C(0, 3)$ 代入得： $-8a = 3$ ，即 $a = -\frac{3}{8}$ ，
则抛物线解析式为 $y = -\frac{3}{8}(x + 2)(x - 4) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 3$ ，
故所求解析式为 $y = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 3$.

【标注】【知识点】二次函数双根式（交点式）

22. 已知抛物线 l_1 的最高点为 $P(3, 4)$ ，且经过点 $A(0, 1)$ ，求 l_1 的解析式.

【答案】 $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$.

【解析】 设解析式为 $y = a(x - 3)^2 + 4$ ，则 $9a + 4 = 1$ ， $a = -\frac{1}{3}$ ，

$$y = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 4, \text{ 即 } y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 1.$$

$$\text{故答案为: } y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 1.$$

【标注】【知识点】二次函数一般式

23. 若二次函数的图象过 $(-3, 0)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(0, -3)$ 三点, 求这个二次函数的解析式.

【答案】见解析

【解析】解: 设二次函数的解析式为 $y = ax^2 + bx + c$,

将 $(-3, 0)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(0, -3)$ 三点代入解析式得:

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ c = -3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases},$$

则二次函数的解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$.

【标注】【知识点】二次函数一般式

24. 二次函数 $y = x^2 - 2ax + 3$ (a 为常数) 在自变量 x 的值满足 $2 \leq x \leq 3$ 时, 其对应的函数值 y 有最小值 $2a$, 则 a 的值为().

- A. -3 B. 1 C. $\frac{7}{6}$ D. $\frac{3}{2}$

【答案】C

【解析】 $\because y = x^2 - 2ax + 3 = (x - a)^2 + 3 - a^2$,

$\therefore$ 当 $x > a$ 时, y 随 x 的增大而增大, 当 $x < a$ 时, y 随 x 的增大而减小,

$\therefore$ ①若 $a < 2 \leq x \leq 3$, $x = 2$ 时, y 取得最小值 $2a$,

可得: $(2 - a)^2 + 3 - a^2 = 2a$,

$$\text{解得: } a = \frac{7}{6};$$

②若 $2 \leq x \leq 3 < a$, 当 $x = 3$ 时, y 取最小值 $2a$,

可得: $(3 - a)^2 + 3 - a^2 = 2a$,

$$\text{解得: } a = \frac{3}{2} < 3 \text{ (不合题意)};$$

③若 $2 < a < 3$ 时, 当 $x = a$ 时, y 取得最小值为 $3 - a^2$,

$$\text{即 } 3 - a^2 = 2a,$$

解得 $a = -3 < 2$ 或 $a = 1 < 2$ (不合题意) .

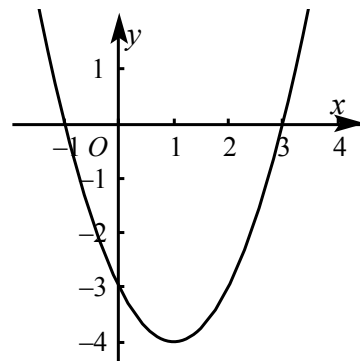
综上, a 的值为 $\frac{7}{6}$,

故选C .

【标注】【知识点】定区间动轴函数的最值问题

栗子

25. 二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图象如图所示, 当 $y < 0$ 时, 自变量 x 的取值范围是 () .



A. $-1 < x < 3$

B. $x < -1$

C. $x > 3$

D. $x < -1$ 或 $x > 3$

【答案】A

【解析】由二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图象可知,

图象与 x 轴的交点坐标是 $(-1, 0)$, $(3, 0)$,

$\therefore$ 当 $y < 0$ 时, 即图象在 x 轴下方的部分, 此时 x 的取值范围是: $-1 < x < 3$,

故答案为: $-1 < x < 3$.

【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

26. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 中的自变量 x 与函数值 y 的部分对应值如下表:

x	$\dots$	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\dots$
y	$\dots$	$-\frac{5}{4}$	-2	$-\frac{9}{4}$	-2	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{7}{4}$	$\dots$

则 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解为 _____ .

【答案】 -2 或 1

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 过点 $(-1, -2)$ $(0, -2)$,

$\therefore$ 此抛物线的对称轴为: 直线 $x = -\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 此抛物线过点 $(1, 0)$,

$\therefore$ 此抛物线与 x 轴的另一个交点为 : $(-2, 0)$,

$\therefore ax^2 + bx + c = 0$ 的解为 : $x = -2$ 或 1 .

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

27. 已知关于 x 的函数 $y = (m - 1)x^2 + 2x + \frac{1}{2}m$ 的图象与坐标轴有且只有 2 个交点 , 则 $m =$ _____ .

【答案】 $0, \pm 1, 2$

【解析】 ①若 $m - 1 = 0$, 则一次函数 $y = 2x + \frac{1}{2}m$ 与坐标轴只有 2 个交点 ,

$\therefore m = 1$.

②若 $m - 1 \neq 0$,

则 $\begin{cases} \Delta = 4 - 2m(m - 1) = 0 \\ \frac{1}{2}m \neq 0 \end{cases}$,

解得 $m = -1$ 或 $m = 2$,

$\therefore m = -1$ 或 2 .

③若 $m - 1 \neq 0$, $\frac{1}{2}m = 0$,

即 $m = 0$ 时 , $y = -x^2 + 2x = -(x - 1)^2 + 1$,

交 x 轴于 $(0, 0)$, $(2, 0)$,

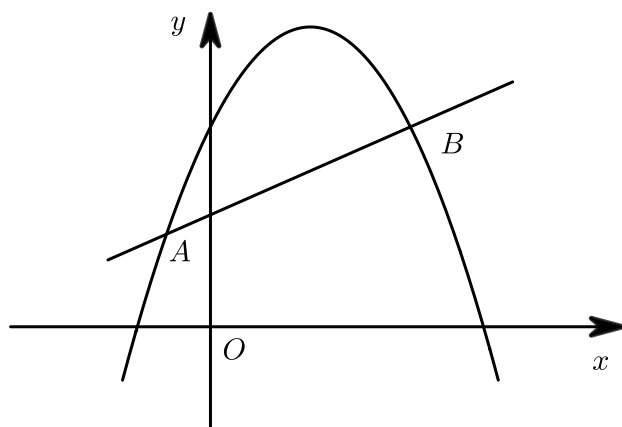
与坐标轴只有 2 个交点 ,

$\therefore m = 0$.

综上 , m 的值为 : $0, \pm 1, 2$.

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

28. 如图 , 直线 $y = mx + n$ 与抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 交于 $A(-1, p)$, $B(4, q)$ 两点 , 则关于 x 的不等式 $mx + n > ax^2 + bx + c$ 的解集是 () .



A. $x < -1$

B. $x > 4$

C. $x < -1$ 或 $x > 4$

D. $-1 < x < 4$

【答案】 C

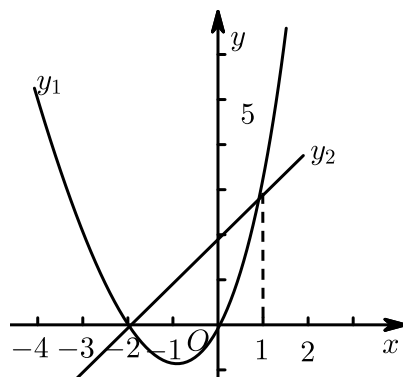
【解析】 由图象可知，关于 x 的不等式 $mx + n > ax^2 + bx + c$ 表示直线 $y = mx + n$ 在抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上方时 x 的取值，

$\therefore x < -1$ 或 $x > 4$.

故选C .

【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

29. 如图是二次函数 $y_1 = ax^2 + bx + c$ 和一次函数 $y_2 = mx + n$ 的图象，观察图象写出 $y_2 \geq y_1$ 时， x 的取值范围 _____ .



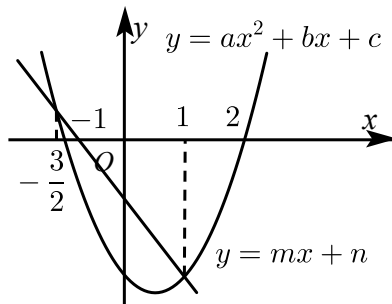
【答案】 $-2 \leq x \leq 1$

【解析】 观察图象可知，当 $-2 \leq x \leq 1$ 时， $y_2 \geq y_1$.

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

30.

已知直线 $y = mx + n$ 和抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 在同一坐标系中的位置如图所示，且抛物线与 x 轴交于点 $(-1, 0)$ 、 $(2, 0)$ ，抛物线与直线交点的横坐标为 1 和 $-\frac{3}{2}$ ，那么不等式 $mx + n < ax^2 + bx + c < 0$ 的解集是（ ）。



- A. $1 < x < 2$ B. $x < -\frac{3}{2}$ 或 $x > 1$ C. $-\frac{3}{2} < x < 2$ D. $-1 < x < 2$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 由函数图象可知：当 $-1 < x < 2$ 时， $ax^2 + bx + c < 0$ ，
当 $x > 1$ 时， $mx + n < ax^2 + bx + c$ ，
 $\therefore$ 不等式 $mx + n < ax^2 + bx + c < 0$ 的解集是 $1 < x < 2$ 。
故选：A。

【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

31. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过 $(-3, 0)$ 与 $(1, 0)$ 两点，关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c + m = 0 (m > 0)$ 有两个根，其中一个根是 3 。则关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c + n = 0 (0 < n < m)$ 有两个整数根，这两个整数根是（ ）。
- A. -2 或 0 B. -4 或 2 C. -5 或 3 D. -6 或 4

【答案】 B

【解析】 $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交点坐标为 $(-3, 0)$ ， $(1, 0)$ ，
 $\therefore$ 抛物线对称轴为直线 $x = \frac{-3+1}{2} = -1$ ，
 $\therefore$ 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c + m = 0$ ，其中一根为 3 ，
 $\therefore$ 根据对称性可知方程的另一根为 -5 ，
 $\therefore$ 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c + n = 0 (0 < n < m)$ 有两个整数根，分别为 x_1 、 $x_2 (x_1 < x_2)$ ，
 $\therefore x_1 = -4$ ， $x_2 = 2$ ，
故这两个整数根为 -4 或 2 。

故选B.

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

栗子

32. 在抛物线 $y = -3x^2$ 向右平移2个单位再向上平移5个单位得到抛物线解析式为().

A. $y = -3(x-2)^2 - 5$ B. $y = -3(x+2)^2 - 5$ C. $y = -3(x+2)^2 + 5$ D. $y = -3(x-2)^2 + 5$

【答案】D

【解析】根据平移规律“左加右减，上加下减”可知抛物线 $y = -3x^2$ 向右平移2个单位再向上平移5个单位得到抛物线为 $y = -3(x-2)^2 + 5$ ，
故答案为D.

【标注】【知识点】二次函数平移变换

33. 把抛物线 $y = x^2 - 2x + 4$ 向左平移2个单位，再向下平移6个单位，所得抛物线的顶点坐标是().

A. (3, -3) B. (3, 9) C. (-1, -3) D. (-1, 9)

【答案】C

【解析】 $y = x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3$ ，
将 $y = (x-1)^2 + 3$ 向左平移2个单位，再向下平移6个单位可得 $y = (x+1)^2 - 3$ ，
∴顶点为(-1, -3).
故选C.

【标注】【知识点】二次函数平移变换

34. 抛物线 $y = 2(x-3)^2 - 1$ 关于 x 轴对称的抛物线解析式为_____.

【答案】 $y = -2(x-3)^2 + 1$

【解析】 $y = 2(x-3)^2 - 1$ 的顶点坐标为(3, -1)，
点(3, -1)关于 x 轴对称的点坐标(3, 1)，
∴所求抛物线解析式为： $y = -2(x-3)^2 + 1$.

【标注】【知识点】二次函数图象关于坐标轴对称

35. 已知抛物线 $y_1 = a(x - m)^2 + k$ 与 $y_2 = a(x + m)^2 + k$ ($m \neq 0$)关于 y 轴对称, 我们称 y_1 与 y_2 互为“和谐抛物线”. 请写出抛物线 $y = -4x^2 + 6x + 7$ 的“和谐抛物线”_____.

【答案】 $y = -4x^2 - 6x + 7$

【解析】解: 抛物线 $y = -4x^2 + 6x + 7$ 的“和谐抛物线”是 $y = -4(-x)^2 + 6(-x) + 7$,
化简, 得 $y = -4x^2 - 6x + 7$,
故答案为: $y = -4x^2 - 6x + 7$.

【标注】【知识点】二次函数图象部分对称

36. 将抛物线 $y = x^2 + 2x - 1$ 绕其顶点旋转 180° 后, 所得到的新的抛物线的解析式为_____.

【答案】 $y = -x^2 - 2x - 3$

【解析】 $y = x^2 + 2x - 1$,
 $= (x^2 + 2x) - 1$
 $= (x^2 + 2x + 1 - 1) - 1$
 $= (x^2 + 2x + 1) - 1 - 1$
 $= (x + 1)^2 - 2$,
将原抛物线绕顶点旋转 180° 后,
得 $y = -(x + 1)^2 - 2$,
即: $y = -x^2 - 2x - 3$.

【标注】【知识点】二次函数图象关于任意点对称

37. 在平面直角坐标系中, 将抛物线 $y = x^2 + 2x + 3$ 绕着它与 y 轴的交点旋转 180° , 所得抛物线的解析式是().

A. $y = -(x + 1)^2 + 2$ B. $y = -(x - 1)^2 + 4$ C. $y = -(x - 1)^2 + 2$ D. $y = -(x + 1)^2 + 4$

【答案】B

【解析】由原抛物线解析式可变为: $y = (x + 1)^2 + 2$,
 $\therefore$ 顶点坐标为 $(-1, 2)$, 与 y 轴交点的坐标为 $(0, 3)$,

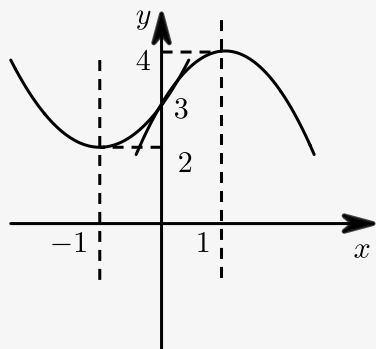
又由抛物线绕着它与 y 轴的交点旋转 180° ,

$\therefore$ 新的抛物线的顶点坐标与原抛物线的顶点坐标关于点 $(0, 3)$ 中心对称,

$\therefore$ 新的抛物线的顶点坐标为 $(1, 4)$,

$\therefore$ 新的抛物线解析式为: $y = -(x - 1)^2 + 4$.

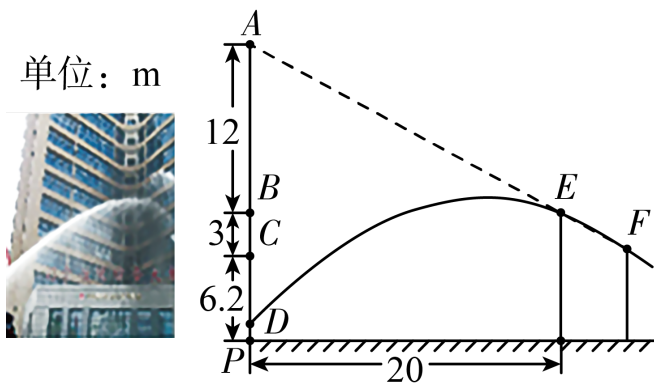
故选B.



【标注】【知识点】二次函数图象关于任意点对称

栗子

38. 两幢大楼的部分截面及相关数据如图, 小明在甲楼 A 处透过窗户 E 发现乙楼 F 处出现火灾, 此时 A , E , F 在同一直线上. 跑到一楼时, 消防员正在进行喷水灭火, 水流路线呈抛物线, 在 1.2m 高的 D 处喷出, 水流正好经过点 E , F . 若点 B 和点 E 、点 C 和点 F 的离地高度分别相同, 消防员将水流抛物线向上平移 0.4m , 再向左后退了 ____ m , 恰好把水喷到 F 处进行灭火.



【答案】 $\sqrt{110} - 10$

【解析】解: 由图形可知, 点 $A(0, 21.2)$ 、 $D(0, 1.2)$ 、 $E(20, 9.2)$ 、点 F 的纵坐标为 6.2 ,

设 AE 所在直线的解析式为 $y = mx + n$,

$$\text{则} \begin{cases} n = 21.2 \\ 20m + n = 9.2 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = -0.6 \\ n = 21.2 \end{cases}$$

∴直线 AE 解析式为 $y = -0.6x + 21.2$,

当 $y = 6.2$ 时, $-0.6x + 21.2 = 6.2$,

解得: $x = 25$,

∴点 F 坐标为 $(25, 6.2)$,

设抛物线的解析式为 $y = ax^2 + bx + c$,

将点 $D(0, 1.2)$ 、 $E(20, 9.2)$ 、 $F(25, 6.2)$ 代入, 得:

$$\begin{cases} c = 1.2 \\ 400a + 20b + c = 9.2 \\ 625a + 25b + c = 6.2 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -\frac{1}{25} \\ b = \frac{6}{5} \\ c = \frac{6}{5} \end{cases},$$

∴抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{6}{5} = -\frac{1}{25}(x - 15)^2 + \frac{51}{5}$,

设消防员向左移动的距离为 $p(p > 0)$,

则移动后抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{25}(x + p - 15)^2 + \frac{51}{5} + \frac{2}{5}$,

根据题意知, 平移后抛物线过点 $F(25, 6.2)$, 代入得:

$$-\frac{1}{25}(25 + p - 15)^2 + \frac{51}{5} + \frac{2}{5} = 6.2,$$

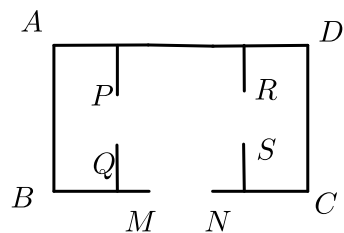
解得: $p = -\sqrt{110} - 10$ (舍)或 $p = \sqrt{110} - 10$.

即消防员将水流抛物线向上平移 0.4m , 再向左后退了 $(\sqrt{110} - 10)\text{m}$, 恰好把水喷到 F 处进行灭火.

故答案为: $\sqrt{110} - 10$.

【标注】【知识点】二次函数的轨迹问题

39. 一养鸡专业户计划用 116m 长的篱笆围成如图所示的三间长方形鸡舍, 门 MN 宽 2m , 门 PQ 和 RS 的宽都是 1m , 围成的鸡舍面积最大是 _____ 平方米.



【答案】 450

【解析】 设鸡舍面积为 y 平方米, $AB = x\text{m}$,

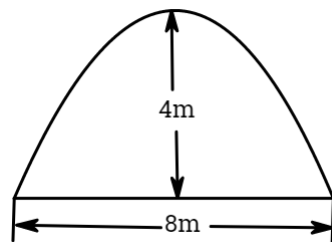
$$\text{则 } AD = \frac{116 - 4x + 2}{2} + 1 = (60 - 2x)\text{m},$$

由题意得： $y = x(60 - 2x) = -2x^2 + 60x$ ，
 $\therefore$ 当 $x = -\frac{b}{2a} = 15$ 时，围成的鸡舍面积最大，
 最大值为： $-2 \times 15^2 + 60 \times 15 = 450$ （平方米）．
 故答案为：450．

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

40. 解答：

（1）一辆宽2米的货车要通过跨度为8米，拱高为4米的单行抛物线隧道（从正中通过），为保证安全，车顶左右两侧离隧道的垂直距离至少要0.5米，求货车的限高为多少？

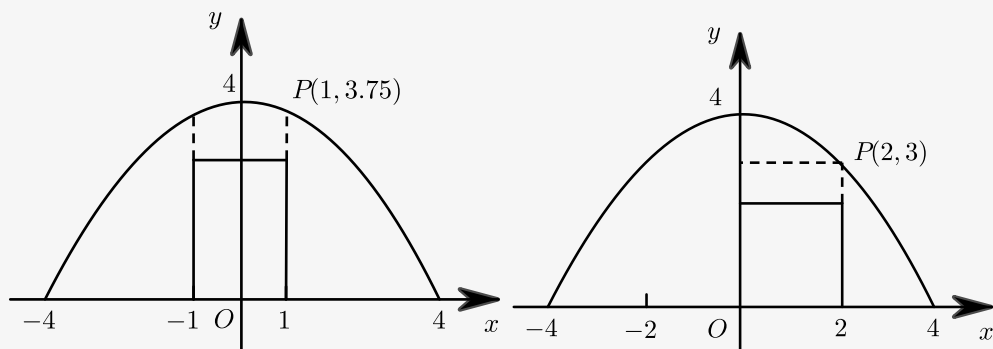


（2）若将（1）中的单行道改为双行道，即货车必须从隧道中线的右侧通过，求货车的限高应是多少？

【答案】（1）3.25米．

（2）2.5米．

【解析】（1）建立如图所示坐标系，



$\therefore$ 抛物线的顶点坐标是 $(0, 4)$ ，

$\therefore$ 可设抛物线的解析式为 $y = ax^2 + 4$ ．

又： $\therefore$ 抛物线过 $(4, 0)$ 点， $\therefore 0 = a \times 4^2 + 4$ ，

$$\therefore a = -\frac{1}{4}.$$

$$\therefore y = -\frac{1}{4}x^2 + 4 \quad (-4 \leq x \leq 4)$$

当 $x = 1$ 时， $y = 3.75$ ．

$\therefore$ 货车限高为 $3.75 - 0.5 = 3.25$ (米) .

(2) 当 $x = 2$ 时, $y = 3$,

故货车限高为 $3 - 0.5 = 2.5$ (米) .

【标注】【知识点】二次函数的通行问题

41. 超市销售某种儿童玩具, 如果每件利润为40元(市场管理部门规定, 该种玩具每件利润不能超过60元), 每天可售出50件. 根据市场调查发现, 销售单价每增加2元, 每天销售量会减少1件. 设销售单价增加 x 元, 每天售出 y 件.

(1) 请写出 y 与 x 之间的函数表达式.

(2) 当 x 为多少时, 超市每天销售这种玩具可获利润2250元?

(3) 设超市每天销售这种玩具可获利 w 元, 当 x 为多少时 w 最大, 最大值是多少?

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}x + 50$.

(2) 当 x 为10时, 超市每天销售这种玩具可获利润2250元.

(3) 当 x 为20时 w 最大, 最大值是2400元.

【解析】 (1) 根据题意得: $y = -\frac{1}{2}x + 50$.

(2) 根据题意得: $(40 + x)\left(-\frac{1}{2}x + 50\right) = 2250$,

解得 $x_1 = 50$, $x_2 = 10$,

$\therefore$ 每件利润不能超过60元,

$\therefore x = 10$.

答: 当 x 为10时, 超市每天销售这种玩具可获利润2250元.

(3) 根据题意得,

$$\begin{aligned}w &= (40 + x)\left(-\frac{1}{2}x + 50\right) \\&= -\frac{1}{2}x^2 + 30x + 2000 \\&= -\frac{1}{2}(x - 30)^2 + 2450 , \\&\therefore a = -\frac{1}{2} < 0 ,\end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $x < 30$ 时, w 随 x 的增大而增大,

$\therefore$ 每件利润不能超过60元,

$\therefore x \leq 20$,

$\therefore$ 当 $x = 20$ 时, $w_{\text{最大}} = 2400$,

答: 当 x 为20时 w 最大, 最大值是2400元.

【标注】【知识点】二次函数的利润问题